

インド数学を取り入れた数量感覚教材の実践と考察

木谷 紀子[†] 星 千枝[†] 黒木 研史[†] 谷内 正裕[†] 鈴木 久[†] 武沢 護^{††}

[†]ベネッセ教育研究開発センター

^{††}早稲田大学高等学院

要約

社会状況が目まぐるしく変化する昨今，社会で役立つ数学的な力として，数や量に対する感覚(数量感覚)が重要視されている．諸外国の数学教材を調べたところ，インドの数学教育での教授法(以下，インド数学とする)には，試行錯誤して考えさせる力や桁の概念を付けるための学習方略に特徴が見られた．そこで，本研究では，数に対する数学的感覚を身につけるために，日本の数学教育にインド数学の内容を取り入れた教材を試作し，高校 1 年生を対象に実践を行った．その結果，本教材で学習した学習者に，数に対する感覚や数に対する興味・関心に一定の効果がみられた．

本稿では，この実践結果を分析し，数学カリキュラムにおける数量感覚の育成についての提案を行う．

キーワード：数量感覚，概算，位取り記数法，インド数学

1. はじめに

数量感覚は，様々な数学的内容や能力と深い関係を持つことから，その重要性や必要性が言われている[1]．また，普段われわれは，日常生活ではそれほど正確な数値を用いているわけではなく，概数や概算といった数量感覚に関連する力を適宜用いている．このようなことから社会で役に立つ数学的な力として，数量感覚の必要性が議論されている．

しかし，数量感覚に関する研究は，小学生を対象とした実践研究が多く，また内容に関しても，数を多面的に見たり，数の構成の理解に重点が置かれた

りした内容が多く，見積もりや暗算，計算の意味理解に重点を置いた内容は少ない[2]．

諸外国の数学教材を調べてみたところ，インドは，ゼロや位取り記数法の発祥の地として知られ，ヴェーダ数学といった古代数学システムが存在する．また，大学入試のレベルなど高等教育の内容は非常に高度であることが分かった．

わが国とインドとは，社会的な背景や数学教育のシステムなどは異なるが，インドの数学教科書やヴェーダ数学に関する参考書籍には，位取りや概算・概数といった数を大まかに捉える力を身につけた

り、具体的に数を操作して試行錯誤したりする指導方法の参考になる特徴が見られた[3][4][5][6].

以上を踏まえて、数量感覚を身につけるために、現状の数学カリキュラムの中に、これらの特徴を取り入れた教材を試作し、実践を行った.

2. 数量感覚の定義と役立ち

数量感覚には、明白な定義はないが、一般的に数に対する感覚や、数で表された量に対する感覚、桁がいくつ増えるといった大きさの感覚などと言われている.

数感覚に関する先行研究では、数への感覚を育てる場が、5つの視点にまとめられている[7].

- ・ 数の大きさに対する感覚
- ・ 数の構成に対する感覚
- ・ 計算の性質に対する感覚
- ・ 数の意味に対する感覚
- ・ 数の美しさに対する感覚

また、サウダーは、概算や暗算と密接に関連する数量感覚をとりあげ、概算の教育は数量感覚や量的直観を発達させる道づけをすると述べている[8][9][10]. さらに、「数を文脈に応じて扱う感覚」として、数感覚の評価に関する研究も行われている[11].

一方、海外に目を向けると、NCTM（全米数学教師協議会）では、数やその操作に関する箇所、数感覚と結びつけ、次の3点を重要視している[12][13].

- ・ 数、数の表現方法、数と数の関係、数の体系を理解する
- ・ 演算の意味とそれらが互いにどのように関連しているかを理解する
- ・ スラスラと計算し、合理的な見積りをする

これらの先行研究を踏まえ、本研究では、次の能力を数量感覚として定義した.

- ❖ 位取り記数法に基づく桁の概念
- ❖ 10進法に基づく数の分解・構成功率
(例 $9=10-1$, $7=10-3$)
- ❖ 概算力 (大体どれぐらいの大きさ)
- ❖ 量や面積を見積もる力 (面積がどれぐらい・量がどれぐらい)

また、数量感覚を特に暗算や計算と関連づけて、桁の感覚や概算、ある固まりで数をとらえる、式を

うまく工夫することで計算が簡単にできるようになるという過程に重点をおいた.

3. インド数学について

インド数学には、日本の数学内容と比較して、様々な特徴がある.

インドの数学教科書では、論理的な証明を非常に重視している一方、概算といった日常生活上の現実の問題に応用しやすい話題もたくさん記述されている[3][4][5][6]. われわれは、インド数学の中でも数量感覚に関する次の点に特に着目して、教材に取り入れた.

- ❖ 試行錯誤して、帰納的に気付く
- ❖ 数を多面的に見る
- ❖ 概算する

また、現行の数学カリキュラムにインド数学の内容を関連付けて、数量感覚の要素を持つ教材を試作することを目指した.

4. 教材の媒体について

今回試作した教材は、「紙教材」と「Web教材」の2つの組み合わせとした.

片方だけでなく、2つの組み合わせにした理由は、上記で述べた手を使って実際に計算しながら試行錯誤をするという部分に重点を置きたかったことが第一の理由である.

また、試作教材の制作に先立ち、高校3年生にWeb教材についての実践を行った. この実践の結果、学習者のスタイルによって好むインターフェースにはいくつか特徴が見られたが、簡単なドリル程度の問題はWebで学習し、じっくり考える問題については紙を使って解きたいという生徒のニーズが見られたことも考慮した[14].

5. 教材の構成と内容

教材の概要を以下に示す.

- ・ 「紙教材」と「Web教材」で構成
- ・ 紙教材: 「例題→解説→練習問題」
- ・ Web教材: 練習問題のみ
- ・ パート1からパート6の6部構成
各パートとも、「紙教材」で学習・練習をして、

「Web 教材」で練習という順序で学習する。

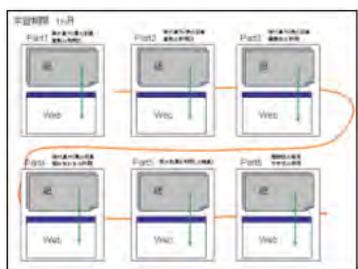


図 5-1. 教材の学習順序

教材は以下の 3 つの内容から構成した。

- ・ 掛け算や 2 乗の計算
- ・ 数字和を使った検算
- ・ 規則性 (見通し力)

インド式掛け算法の意味や数字和の仕組みを展開公式や文字式と関連付けて理解を深めるため、現行カリキュラムでの導入箇所は中学校 3 年生の『多項式』や高校 1 年生の『乗法の公式』での発展的内容とした。

ここで、教材の一部である『掛け算や 2 乗の計算』部分の教材の内容を詳しく紹介する。掛け算や 2 乗の計算を中心として、数量感覚を身につけるために必要な内容を関連付けて導入した。例えば、 87×97 という小学校で学んだ 2 桁同士の掛け算を、以下のさまざまな面から見直す内容を入れた。

❖ 日常の場面

計算を使う場面を最初に提示し、その計算への意識を高めた。

チャレンジ

お小遣い日まで残すところあと 2 日になった、ある 1 日だとします。コンビニエンスストアで、雑誌とお菓子を買ったところ、合計金額は 980 円でした。支払おうと財布を見たら、財布に 5% の割引券を発見しました。割引券を使ったときの合計金額はいくらでしょうか？どのように計算しますか？考えてみましょう。

図 5-2. 計算を使う日常場面

❖ インド式計算法

インド式計算法をステップごとに解説した。この計算法は、10 の累乗の補数を用いた桁ごとに計算する計算法である。

$87 \times 97 = ? ? ?$

87 と 97 に一番近い 10 の累乗の数 100 を元を考えます。

| | | |
|-------------|-------|-----------------------------------|
| 87 | -13 | $(-13) \times (-3) = 39$ |
| $\times 97$ | -3 | 87 は、100 との差が 13 (100 に 13 足りぬ) |
| <hr/> | 84 | 97 は、100 との差が 3 (100 に 3 足りぬ) |
| | 39 | $87 - 3 = 84$ |

図 5-3. インド式計算法

❖ 展開公式との関連付け

計算法を紹介した後、それを論理的に裏付けるために、展開の公式を使って説明をする。

$$\begin{aligned}
 87 \times 97 &= (100 - 13)(100 - 3) \\
 &= 100^2 + (-13)(-3) \times 100 + (-13)(-3) \\
 &= 100(100 - 13 - 3) + (-13)(-3) \\
 &= 100(87 - 3) + (-13)(-3) \\
 &= 8439
 \end{aligned}$$

図 5-4. 計算と展開公式との関連付け

❖ 記号を使つてのとらえなおし

実際の数値で展開の公式を使って考えたあと、記号を使つてもう一度計算をとらえなおした。

100 を X とした場合

$$\begin{aligned}
 (X - 13)(X - 3) &= X^2 + (-13)(-3) \times X + (-13)(-3) \\
 &= X(X - 13 - 3) + (-13)(-3)
 \end{aligned}$$

図 5-5. 記号を使った計算の捉えなおし

❖ 位で数をとらえる

計算結果を百位以上とそれ以下で強調して、捉えられるように工夫した。

| | | |
|-------------|-------|----------------------------------|
| 87 | -13 | $100(87 - 3) + (-13)(-3) = 8439$ |
| $\times 97$ | -3 | |
| <hr/> | 84 | 39 |

$A = 87 - 3$, $B = (-13)(-3)$ と置き、位取りに着目すると次のように表せます。

$100A + B = 8439$

図 5-6. 位で数をとらえる

❖ インド式計算法と桁の概念

Aがどんな数でも、100を掛ければ、下2桁は必ず0になります。つまりBが2桁の数なら、 $100A+B$ は、Aの横にBを並べた数として表せるのです。

A=84, B=39なら、 $100A+B=8400+39=8439$ (8439と並べて表示)

$$\begin{array}{r} 87 \quad -13 \\ \times 97 \quad -3 \\ \hline 84 \quad 39 \\ \hline \end{array}$$

→ B
→ A

図 5-7. インド式計算法と桁の概念

❖ 概算法

計算式の概算値算出の説明とその練習を取り入れた。

$$\begin{array}{l} 87 \times 97 \\ \approx 90 \times 100 \\ = 9000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 52 \times 53 \\ \approx \square \times \square \\ = \square \end{array}$$

図 5-8. 概算値算出とその練習

更に上記の概算方法とインド式計算法とを関連付けた。

上記の概算の結果と例題の計算方法を比較してみると、十位以上の数は、87から3を引いた数として計算しているので、この数値が大体この計算結果と一致すると考えることができます。

$$\begin{array}{r} 87 \quad -13 \\ \times 97 \quad -3 \\ \hline 84 \quad 39 \\ \hline \end{array}$$

図 5-9. 概算法とインド式計算法の関連付け

これは掛け算と2乗の計算の導入部分で、更に50や20を基本とした掛け算・2乗の計算へと続く。100の時の学習内容を元に、50や20を基本とした時への応用とつなげる。また、数字和部分では、数字和表を作成して、そこから数字の特性に気づいてもらう問いを入れた。

ここで数字和を一覧表にしてみましょう。

| | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 数字和 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 数 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 数字和 | | | | | | | | | |
| 数 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 数字和 | | | | | | | | | |

表を見て気付いたことを書いてみましょう。

図 5-10. 数字和表の作成

また、最後に応用部分として、計算式と図、見通し力を関連づけた内容を入れた。

黒い丸の数を考えてみましょう。1つの図形でも、色々な見方ができると分かります。

$5 \times 5 = 25$ $5 + 5 + \dots + 5$ $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5 \times 5$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$

図 5-11. 計算式と図との関連付け

6. 実践

今回試作した教材についての分析を行うために、以下の内容で実践を行った。

対象 私立高校1年 男子 51名

期間 2007年5月～6月 約1ヶ月間

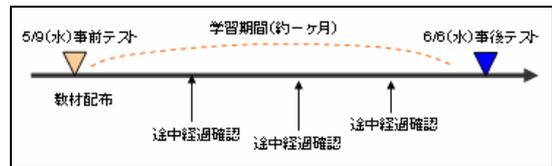


図 6-1. 実践スケジュール

事前テストおよび事後テストは、学校のコンピュータールームにおいて Web 上で一斉に実施し、教材は放課後や家庭での学習とした。



図 6-2. 事後テストの様子

テストおよび Web 上での練習問題部分は、各学習者の解答結果と解答時間を記録するために、サーバ上で簡単な履歴を取った。紙教材の履歴については、教材の第一面に簡単な日程表を用意し、各学習者に記入してもらった。

教材は、前述の概算やインド式計算法の特徴を強調した内容(グループA)と従来のわが国での教授

法に沿った内容（グループ B）の 2 タイプ用意し、51 名を 2 グループに分けて、取り組んでもらった。

事前テストと事後テストの内容は、掛け算や 2 乗の計算、10 の累乗との差を求める問題や図と式を関連付ける問題を用意した。

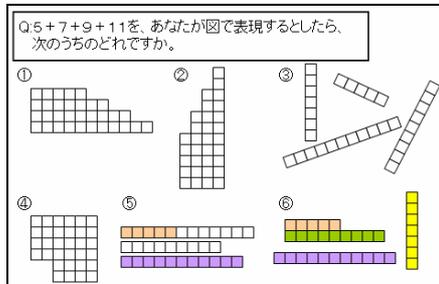


図 6-3. テストの内容（一部）

7. 実践結果

1 ヶ月の学習状況は次のとおりであった。

紙の教材(N=51)

| 最後まで | 途中で (Part1~2まで) | 全くやっていない | 教材紛失など |
|-------|--------------------|----------|--------|
| 33 | 10 | 4 | 4 |
| 64.7% | 19.6% | 7.8% | 7.8% |

Web教材(N=51)

| 最後まで | 途中で | 全くやっていない |
|-------|-------|----------|
| 27 | 6 | 18 |
| 52.9% | 11.8% | 35.3% |

図 7-1. 1 ヶ月の学習状況

紙の教材で学習・練習してから、Web 上で更に練習を行うという学習の流れを意図していたが、紙の教材で学習を終えてしまう生徒も多く、Web で学習する生徒数は半数強にとどまった。

事前テストと事後テストの結果を学習者全体で見ると、正解数が微増、テストに掛かった時間は、100 秒近く早くなった。

| | 正解数 | | 解答にかかった時間(秒) | |
|-------|-------|-------|--------------|---------|
| | 平均 | 標準偏差 | 平均 | 標準偏差 |
| 事前テスト | 23.55 | 1.999 | 411.850 | 105.708 |
| 事後テスト | 23.73 | 1.948 | 313.300 | 64.129 |

N=40

(学習状況で分析対象は 40 人とした)

図 7-2. 事前・事後テスト結果

更に、グループ A とグループ B のグループ間の

比較をすると、事前・事後テスト間では、正解数・解答時間において明らかな差は見られなかった。しかし、テスト結果の内容を詳しく分析すると次の結果が見られた。

掛け算の計算部分では、グループ B の方が、結果が良い問題も見られたが、10 の累乗との差を求める問題や図と式を関連付ける問題については、グループ A の方が良い傾向が見られた。

| 問題内容(例) | |
|---------|---|
| Q1 | 計算力 97×98=? |
| Q2 | |
| Q3 | 例) 97×98=? |
| Q4 | |
| Q5 | 計算力 88×87=? |
| Q6 | 計算力 10の9の差は? |
| Q7 | |
| Q8 | 例) 10と12の差は? |
| Q9 | |
| Q10 | 計算力 10の9の差は? |
| Q11 | 10の位の数の数が10にある組み合わせは? A(1,2,3) B(2,2,4) C(3,4,3) D(4,4,2) E(5,4,4) F(7,3,5) G(8,1,4) H(9,1,1) I(9,4,4) J(4,4,5) |
| Q12 | 計算力 100と9の差は? |
| Q13 | 計算力 100と94の差は? |
| Q14 | 計算力 1+2+3+9の差は? |
| | 例) 「5+7+9+11= 」あなたの計算の仕方は、次のどれですか? 12+20 16×2 12+9+11 6 ² -2 ² その他 |

図 7-3. テスト内容詳細

また、この実践を通して、暗算、概算に関する意識に、何らかの変化があったのかを調べるため、学習前と学習後に暗算・概算に関するアンケートを実施した。その結果、以下の項目において、グループ A の方に 5%水準で差異が見られた。(この実践を通して、頻度があがった)

- ❖ 割り勘をするときに、暗算で 1 人あたりの額を計算したことがある
- ❖ 缶の成分表などの数字をじっくり読んだことがある

また、学習後に実施したアンケートの自由回答欄には、次のような意見が見られた。

- 2 ケタの数字同士の計算は、テストでも使えてとても便利そうだ。
- 学習期間中は暗算を使うことが多かった。
- 今まで知らなかった考え方なども知ることができて、とても勉強になったと思う。
- いろいろと数字についておどろくことがあった。
- 知らなかった解法などを知ることができて良かった。
- 何げない数字をあらゆる組み合わせで計算で

きることで乗法公式の不思議がわかった。

8. まとめと考察

今回、この実践を通して、意識されにくかった数字や計算についての興味・関心の高まりや、数を操作することで、乗法公式と関連させて計算できるという意識の変容を学習者にみることができた。

また、テスト結果から、学習者が教材の中で文字式を使って計算を捉えなおし、文字式の意味を考えたり、位で数を捉えたりするきっかけが与えられることで、桁の大きさの概念を意識的に考える教材となっていたことが確認できた。

以上の結果から、学校カリキュラムの中にインド数学や数量感覚的要素を取り入れた教材を用いることで、学習者は学校数学の内容と関連付けて、数の桁の感覚や式をうまく工夫するということへ一定の効果があつたと言える。

9. 今後の課題

今回、約1ヶ月間の紙教材とWeb教材の組み合わせ学習を実施した。学習者の意志に任せた家庭での自由学習としたため、定期的に学習しなかった学習者もみられた。

また、今回試作した教材は、数に対する感覚が中心で、量に対する感覚が扱えなかった。長さや面積といった量についても豊かな感覚をもとにすることで、立式や問題解決につながる力を身につけられるという実践研究があることから、今後は定期的学習につなげる工夫をしつつ、量感覚に関する内容についても充実させていく必要がある。

さらに、数や量に関する感覚は、一朝一夕につくものではないため、小学校からの算数・数学カリキュラム全体の中で検討すべきであると考えられる。

参考文献

- [1] 文部科学省中央教育審議会, 算数・数学専門部会における主な意見, 2006.
- [2] 銀島文, 清水克彦, 数量感覚の育成に関する研究動向の整理と検討Ⅱ－日本における数量感覚に関する研究・実践報告の動向分析, 第36回数

学教育論文発表会論文集, 2003.

- [3] NCERT, National Council of Educational Research and Training, <http://www.ncert.nic.in/>
- [4] MATHEMATICS Textbook for Class I~VIII, National Council Of Educational Research And Training, 2005.
- [5] 芳沢光雄, 算数・数学が得意になる本, 講談社, 2006.
- [6] Jagadguru Swami Sri Bharati Krsna Tirthaji Maharaja, Vedic Mathematics, MOTILAL BANARSIDASS PUBLISHERS PVT, LTD, 2004.
- [7] 筑波大学附属小学校算数科教育研究部, 数への感覚を育てる指導, 東洋館出版社, 1990.
- [8] Judith T. Sowder and Schappelle, Bonnie P., Ed., Establishing Foundations for Research on Number Sense and Related Topics, Report of a Conference San Diego State University, 1989.
- [9] Sowder, J. T., Estimation and related topics, In D. Grouws (Ed.), Handbook for research on mathematics teaching and learning, 1992, pp. 371-389. New York: Macmillan.
- [10] 吉田 甫, 多鹿 秀継, 認知心理学からみた数の理解, 北大路書房, 1995.
- [11] 河本 直樹, 数の計算・処理における数量感覚の評価に関する一考察, 第36回数学教育論文発表会論文集, 2003.
- [12] Robert E. Reys, James F. Rybolt, Barbara J. Bestgen, J. Wendell Wyatt, Processes Used by Good Computational Estimators, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 13, No. 3 (May, 1982), pp. 183-201.
- [13] Robert E. Reys, Barbara J. Reys, Nobuhiko Nohda, Hideyo Emori, Mental Computation Performance and Strategy Use of Japanese Students in Grades 2, 4, 6, and 8, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 26, No. 4 (Jul., 1995), pp. 304-326.
- [14] 谷内正裕, 星千枝, 黒木研史, 木谷紀子, 武沢護, 学習者による教材インタフェースの個人化から見た学習スタイルの分析, 日本教育工学会第23回全国大会講演論文集, 2007, pp.223-224.